2.3.15 Soustavy více rovnic o více neznámých III

Předpoklady: 2314

Největší problém při řešení soustav - výroba trojúhelníkového tvaru (tedy vyrábění nul). Postup v dosavadních příkladech byl rychlý - využíval snadnost soustavy. Ve složitějších případech se používá postup, který vede vždy k cíli a který se snadno dodržuje.

Pedagogická poznámka: Při řešení soustav je třeba, aby studenti zbytečně neztráceli kontakt se třídou tím, že udělají chybu a dlouho ji hledají. Proto se před každým krokem radíme, co uděláme, abychom postupovali stejně a mohli jsme si po každém kroku kontrolovat výsledky, případně opravovat chyby. Nadanější část třídy samozřejmě postupuje rychleji, ale tímto způsobem je možné udržet dostatečnou rychlost postupu i u zbytku, který by se jinak do výpočtu totálně zamotal.

Pedagogická poznámka: Normálně netlačím na to, aby studenti dodržovali úpravu v sešitě, ale u soustav na tom trvám. Jde zejména o to, aby:
opisovali celou sadu rovnic, nic nevynechávali a oddělovali různé fáze řešení od sebe
psali čísla patřící ke stejným proměnným v různých rovnicích pod sebe
nekomplikovali zápis tím, že opisují vynásobené tvary rovnic (tlačím studenty k tomu, aby soustavu opisovali co nejméně krát, protože každé opsání znamená možnost chyby)
psali si jednotlivé úpravy vedle rovnic, tak aby mohli později kontrolovat

Pedagogická poznámka: Sčítání násobků rovnic nevyžaduje žádné zvláštní schopnosti, ale není možné je úspěšně provádět, pokud se studenti nedokáží velmi dobře soustředit. Část třeba jinak i velmi dobrých studentů má právě se soustředěním a tím i se soustavami problémy. Je potřeba jim to říct, aby zbytečně nemarnili čas tím, že hledají logické problémy tam, kde stačí pouhé soustředění.

Pedagogická poznámka: První uvedená soustava sice není označena jako příklad, ale řešíme ho napolovic samostatně. Vždycky si řekneme, jakou úpravu provedeme a pak ji studenti dělají sami. Po chvilce si zkontrolujeme výsledek a bavíme se o další úpravě.

Gaussův eliminační algoritmus

Jde o speciální případ sčítací metody.

Vyřešíme Gaussovou eliminační metodou soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 2x-y+5z&=5 \\ x-2y+z&=1 \\ -x+3y+2z&=0 \end{aligned}.$$

1. krok (nepovinný) = přerovnání soustavy tak, aby rovnice s nejmenšími koeficienty byla první. Pokud je možné tuto novou první rovnici zkrátit, její zkrácení.

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ 2x-y+5z&=5 \\ -x+3y+2z&=0 \end{aligned}$$

2. krok likvidace *x* = první rovnici nechám beze změny, ostatní rovnice sčítáme s násobky první rovnice tak, aby ve výsledné rovnici zmizelo *x*.

$$\begin{array}{ll} & x-2y+z=1 \\ [\![2]\!]-2\cdot[\![1]\!] & 3y+3z=3 \quad /:3 \\ [\![3]\!]+[\![1]\!] & y+3z=1 \end{array}$$

Po každém kroku zkrátíme všechny nově vzniklé rovnice, které to umožňují (zjednodušuje to další výpočty, máme menší čísla).

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ y+z&=1 \\ y+3z&=1 \end{aligned}$$

3. krok likvidace *y* = s první rovnicí již nebudeme dále počítat, použijeme ji pouze na konci příkladu pro určení *x* (žádná další rovnice již *x* neobsahuje), druhou rovnici necháme beze změny, ostatní rovnice (třetí a další) sčítáme s násobky druhé rovnice tak, aby ve výsledné rovnici zmizelo *y* (nemusíme se už starat o *x*, protože žádná z těchto rovnic ho neobsahuje).

$$\begin{array}{ll} & x-2y+z=1 \\ & y+z=1 \\ [\![3]\!]-[\![2]\!] & 2z=0 \quad /:2 \end{array}$$

Po každém kroku zkrátíme všechny nově vzniklé rovnice, které to umožňují (zjednodušuje to další výpočty, máme menší čísla).

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ y+z&=1 \\ z&=0 \end{aligned}$$

4. krok likvidace *z* (v našem případě ho již neděláme) = s první a druhou rovnicí již nebudeme dále počítat, použijeme je pouze na konci příkladu pro určení *x* a *y* (žádná další rovnice již *x* a *y* neobsahuje), třetí rovnici necháme beze změny, ostatní rovnice (čtvrtou a další) sčítáme s násobky třetí rovnice tak, aby ve výsledné rovnici zmizelo *z* (nemusíme se už starat o *x* a *y*, protože žádná z těchto rovnic je neobsahuje) .

5. a další krok likvidace dalších proměnných (v našem případě je již neděláme) = vypadají stejně jako předchozí kroky, po každém dalším kroku se tak zmenší počet rovnic, se kterými pracujeme, o jednu a stejně tak se sníží v těchto rovnicích počet proměnných. Postup zastavíme ve chvíli, kdy získáme trojúhelníkový tvar soustavy (v našem případě jsme toho dosáhli po třetím kroku).

Pokud při libovolném kroku objevíme dva stejné řádky, jeden z nich vynecháme.
Pokud při libovolném kroku objevíme dva řádky se stejnou levou stranou a různou pravou stranou, soustava nemá řešení (podmínky jsoucí proti sobě).

Dokončení

Získáme soustavu v trojúhelníkovém tvaru:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ y+z&=1 \\ z&=0 \end{aligned}$$

Postupujeme zdola nahoru a postupně dopočítáváme hodnoty proměnných.
Hodnotu *z* známe, dosadíme do druhé rovnice a určíme *y*:

$y+z=1 \Rightarrow y+0=1$

$y=1$

Dosadíme do první rovnice a určíme *x*:

$x-2y+z=1 \Rightarrow x-2\cdot 1+0=1$
$x=3$
$K=\{[3;1;0]\}$

Pedagogická poznámka: Setkal jsem se s tím, že soustava $\begin{aligned} x-2y+z&=1\\ y+z&=1\\ y+3z&=1\end{aligned}$ byla prohlášena za neřešitelnou, protože druhá a třetí rovnice se shodují v pravé straně, zatímco v levé se liší. Pokud se taková diskuse objeví, je třeba argumentovat:
jedničku můžeme dosazováním do dvou proměnných získat nekonečně mnoha způsoby (a tedy ne jen dvěma, jak se stalo v tomto případě),
pokud se dvě rovnice shodují v levých stranách, nemáme žádnou možnost, jak dosazením získat dvě různá čísla pro rovnost se dvěma pravými stranami (soustavy bez řešení), v našem případě však máme dvě různé levé strany, které mohou dospět ke stejnému výsledku, provedeme zkoušku a vidíme, že jsme doopravdy získali ze dvou různých levých stran stejné číslo 1.

Pedagogická poznámka: Samostatné zjednodušování soustav je ze začátku velkým problémem, nejde ani tak o pochopení algoritmu jako o velké množství chyb, které studenti dělají zejména ve znaménkách při výpočtech typu $2\cdot 1-2(-3)=$.

Př. 1: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{aligned} x-2y+2z&=5\\ 2x-3y+2z&=5\\ 3x+2y-z&=2\end{aligned}$.

likvidujeme x v 2. a 3. rovnici

$$\begin{array}{lr} & x-2y+2z=5\\ 2[\![1]\!]-[\![2]\!] & -y+2z=5\\ 3[\![1]\!]-[\![3]\!] & -8y+7z=13\end{array}$$

likvidujeme y v 3. rovnici

$$\begin{array}{lrl} & x-2y+2z=5 & \\ & -y+2z=5 & \\ 8[\![2]\!]-[\![3]\!] & 9z=27 & /:9\end{array}$$

$$\begin{aligned} x-2y+2z&=5\\ -y+2z&=5\\ z&=3\end{aligned}$$

Máme trojúhelníkový tvar.
dopočítáme y: $-y+2\cdot 3=5 \Rightarrow y=1$
dopočítáme x: $x-2\cdot 1+2\cdot 3=5 \Rightarrow x=1$
$K=\{[1;1;3]\}$

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu si někteří studenti všimnou toho, že upravování soustavy v prvním kroku při likvidaci x bude poměrně nepříjemné (velká čísla). Objevují se dva návrhy: „vyrábět nuly z pravé strany a nejdříve likvidovat proměnou z“ nebo „přerovnat soustavu tak, aby na začátku bylo y nebo z.“ Obojí je samozřejmě možné, a pokud s tím někdo přijde, zaslouží si pochvalu, přesto doporučuji spočítat soustavu klasicky přes x jako nácvik odečítání rovnic mezi sebou. Druhým důvodem je pak fakt, že v učebnici je soustava spočítaná přes x, a pokud ji budou studenti počítat jinak, nebudou mít šanci si svůj postup zkontrolovat.

Př. 2: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{aligned} 2x-y+3z&=9\\ 3x+3y-2z&=3\\ 5x+2y+z&=12 \end{aligned}$.

likvidujeme x v 2. a 3. rovnici

$$\begin{array}{ll} & 2x-y+3z=9 \\ 2[\![2]\!]-3[\![1]\!] & 9y-13z=-21 \\ 2[\![3]\!]-5[\![1]\!] & 9y-13z=-21 \end{array}$$

v soustavě jsou dvě stejné rovnice $\Rightarrow$ jednu můžeme vynechat (neříká nic nového) $\Rightarrow$ pouze dvě rovnice a tři neznámé $\Rightarrow$ zůstala jedna možnost volby

$$2x-y+3z=9$$
$$9y-13z=-21$$

volíme z a vyjadřujeme y: $y=\dfrac{13z-21}{9}$

dosazujeme do první rovnice:

$$2x-\frac{13z-21}{9}+3z=9 \quad /\cdot 9$$
$$18x-13z+21+27z=81$$
$$18x+14z=60$$
$$9x=30-7z$$
$$x=\frac{30-7z}{9} \qquad K=\left[\frac{30-7z}{9};\frac{13z-21}{9};z\right] z\in R$$

Poznámka: Mohli bychom vyjadřovat řešení pomocí neznámé y, která se také vyskytuje spolu se z v poslední rovnici. Naopak použití x by bylo velice nešťastné, protože se vyskytuje pouze v první rovnici spolu s ostatními dvěma neznámými a na jejich vyjadřování by nám zbývala opět soustava dvou rovnic.

Př. 3: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{aligned} 2x-y+3z&=4\\ x+2y-z&=-3\\ 4x+3y+z&=2 \end{aligned}$.

Nejdříve přerovnáme soustavu a nahoru dáme nejjednodušší rovnici

$$x+2y-z=-3$$
$$2x-y+3z=4$$
$$4x+3y+z=2$$

likvidujeme x v 2. a 3. rovnici

$$x+2y-z=-3$$
$[\![2]\!]-2[\![1]\!]$ $\quad -5y+5z=10$

$[\![3]\!]-4[\![1]\!]$ $\quad -5y+5z=14$

likvidujeme *y* ve třetí rovnici

$$x+2y-z=-3$$
$$-5y+5z=10$$
$[\![3]\!]-[\![2]\!]$ $\quad 0=4$

Soustava nemá řešení $\Rightarrow K=\emptyset$ (bylo to vidět hned po prvním kroku, druhá a třetí rovnice si odporovaly).

Pedagogická poznámka: Následující příklad si studenti o hodině stihnou maximálně opsat. I když většinou nedávám studentům domácí úkoly, v tomto případě chci, aby ho spočítali.

Př. 4: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 2x-y-z&=1.\\ 3x+2y+z&=1\end{aligned}$

Nejjednodušší rovnice je první $\Rightarrow$ nebudeme přerovnávat a rovnou likvidujeme *x* v 2. a 3. rovnici:

$$x+y+z=1$$
$2[\![1]\!]-[\![2]\!]$ $\quad 3y+3z=1$

$3[\![1]\!]-[\![3]\!]$ $\quad y+2z=2$

likvidujeme *y* ve třetí rovnici

$$x+y+z=1$$
$$3y+3z=1$$
$[\![2]\!]-3[\![3]\!]$ $\quad -3z=-5$

Máme trojúhelníkový tvar $\Rightarrow z=\frac{5}{3}$

Dopočteme *y* z druhé rovnice: $3y+3\cdot\frac{5}{3}=1 \Rightarrow 3y=1-\frac{15}{3} \Rightarrow y=-\frac{4}{3}$

Dopočteme *x* z první rovnice: $x+\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{5}{3}=1 \Rightarrow x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$K=\left\{\left[\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right]\right\}$$

Př. 5: Petáková:
strana 16/cvičení 31 c) e) f)

Shrnutí: Soustavu rovnic můžeme převést do trojúhelníkového tvaru postupnou likvidací proměnných sčítáním vhodných násobků rovnic mezi sebou.